第1章　強度と応力

1-4 応力の真の意味を理解しよう

■ 数理的表現でテンソルを直観しよう

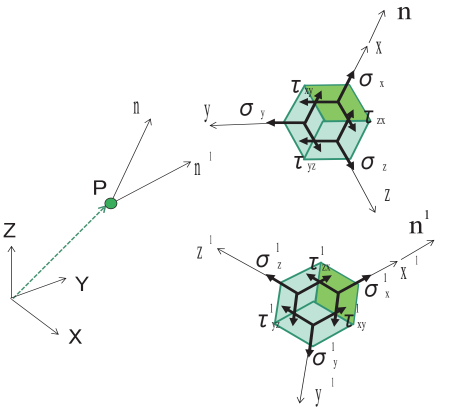
さて、この節で、数理的な切り口からテンソルに触れてみる。

多少、数式も出てくるが、興味のない方はどうぞ飛ばして下さい。一方、興味のある方は、美しく簡潔なマトリクスで表現されている数式群を、どうぞご堪能下さい。

6）数理的に表現すれば、「テンソルの成分は3×3の**対称マトリクス**」で表すことができる。この9個の数の組をテンソル(**2次のテンソル**)という。

応力テンソルでは、この3×3の対称マトリクスが応力状態を示している。マトリクスでの3つの対角成分が垂直応力で、それ以外がせん断応力である。

応力成分は、微小要素(直方六面体)に固定された**要素座標系**に関しての値となる。微小要素の方位はこの要素座標系で規定され、方位に応じて応力成分が決まる。



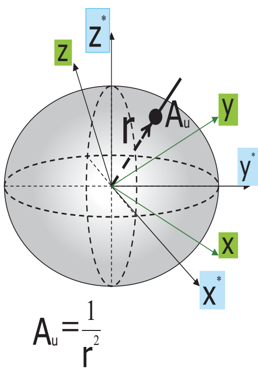
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^1_x & \tau^1_{xy} & \tau^1_{zx} \\ \tau^1_{xy} & \sigma^1_y & \tau^1_{yz} \\ \tau^1_{zx} & \tau^1_{yz} & \sigma^1_z \end{bmatrix}$$

7）楕円面は、以下のようにテンソル(3×3の対称マトリクス)で表すことができる。これが**楕円面の方程式**である。

$$\{x \quad y \quad z\}\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 1$$

$$\{x^* \quad y^* \quad z^*\}\begin{bmatrix} A^*_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & A^*_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A^*_{zz} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Bmatrix} = 1$$



ここで、x，y，z は、ベクトルr(楕円面上の**位置ベクトル**)のx，y，z 成分(x-y-z要素座標系)である。又、x*，y*，z* は、x*-y*-z*要素座標系でのベクトルrのx，y，z 成分である。

8）特定の方位での応力状態は、以下のように、直方六面体微小要素に固定された要素座標系の**座標変換(方向余弦)マトリクス**から求めることができる。これは**テンソルの座標変換**である。

$$[A] = [\Phi][A^*][\Phi]^T$$

ここで、

$[A]$：特定したい要素座標系$(x-y-z$系$)$での応力テンソル
$[A^*]$：主軸に設定した要素座標系$(x^*-y^*-z^*$系$)$での応力テンソル
$[\Phi]$：$x^*-y^*-z^*$座標系から$x-y-z$座標系への座標変換マトリクス
$[\Phi]^T$：$[\Phi]$の転置マトリクス

9）要素座標系を楕円面での主軸の方向に合致させると、対称マトリクスは**対角要素**だけになる(主値、主応力)。

このように、この主軸の方向を見出し、主値の大きさと方向を見出すことを**テンソルの主軸問題**という。 この計算には、一般的に、以下の**固有値解析**が用いられる。

$$[A]\{r\} = \lambda\{r\}$$

ここで、

$[A]$：テンソル
λ：固有値
$\{r\}$：固有ベクトル

この式を幾何学的に解釈すれば、「楕円面に関して、主軸は法線の方向と位置ベクトルの方向が一致する」ということを示している。

この式より3つの**固有値**(主値)が得られ、それにより、3つの**固有ベクトル**(固有モード)が求まる。**固有モード**は座標系の方位にあたる。

■ 2次元平面で確認しよう

以上の説明は、多少、抽象的で分かり難いかも知れない。

破損問題に関して構造体で最も危険なのは、一般に、外表面である。その為、3次元ではなく**2次元平面**での応力状態を扱う場合が多い。

従って、2次元平面での応力テンソルを理解することは大いに意義があり、又、次元がより少ないのでテンソルの意味も掴み易いと思う。

その為、より簡便な2次元平面での応力テンソルを例にとり、具体的な下記に示す設問を介して、テンソルの説明を試みたい。

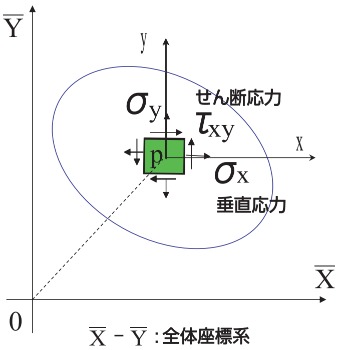
現場ではこのような設問での用途が最も多いのではないか、と思う。

(設問1)　ある特定箇所(位置)での応力状態が分ったとして、その主方向と主応力を求める。

(設問2)　主方向よりϕ方向での応力状態を求める。

(設問1)に関して：

●まず、ある特定箇所(位置p)での応力状態は次のようになったとすると（下図）、応力テンソルは、以下のように表すことができる。



$\bar{X}-\bar{Y}$: 全体座標系
$x-y$: $x-y$ 要素座標系

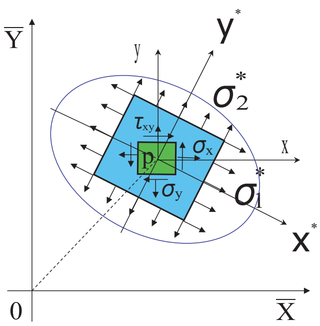
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

●主値、及び主方向は、以下の固有値解析より求まる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = S\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

ここで、$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$: 固有ベクトル

S : 固有値



σ_1^* σ_2^* : 主応力
x^* y^* : 主方向

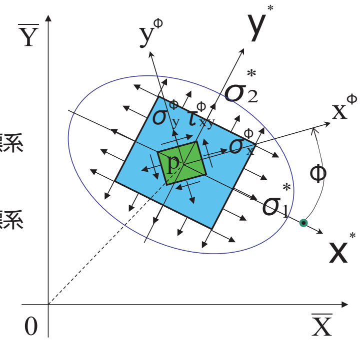
この式より、固有値Sを解くことで、それぞれ2つの主応力と主方向が得られる。

尚、主方向は、x-y要素座標系基準で求められる。

(設問2)に関して：

$x^\Phi - y^\Phi$: $x^\Phi - y^\Phi$ 要素座標系

$x^* - y^*$: $x^* - y^*$ 要素座標系



$$\begin{bmatrix} \sigma_x^\Phi & \tau_{xy}^\Phi \\ \tau_{xy}^\Phi & \sigma_y^\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \\ -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1^* & 0 \\ 0 & \sigma_2^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \\ -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix}^T$$

ここで、

$\begin{bmatrix} \sigma_x^\Phi & \tau_{xy}^\Phi \\ \tau_{xy}^\Phi & \sigma_y^\Phi \end{bmatrix}$: $x^\Phi - y^\Phi$ 要素座標系での応力テンソル

$\begin{bmatrix} \sigma_1^* & 0 \\ 0 & \sigma_2^* \end{bmatrix}$: $x^* - y^*$ 要素座標系での応力テンソル

$\begin{bmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \\ -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix}$: 座標変換マトリクス

■ 応力の概念を提唱したのは誰か？

以上、応力テンソルについていろいろの角度からスポットライトを当ててみた。読者は、何か得心なるものを見出すことができたのか？　それとも、やはり、テンソルは依然として厄介なものなのか？

少なくとも、当初述べた掴み難いと感じていた設問点に関して、以下の事情は理解できよう。

① 総ての法線方向で同じ値を採る「圧力」と違って、応力は方向性(方位)を持っている。圧力は面に垂直であるが、応力は必ずしもそうではない。

② 該当箇所の指定だけでなく微小要素の方位も設定しないと、応力の値は決まらない。

一方、

③ なぜ、応力状態は垂直応力とせん断応力で構成されているのか？

については、多少、補足説明が必要かも知れない。

実は、このような設問は自明なのか愚問なのか、著者の知る限り、この設問に対して明確に答えてくれる人には巡り会えなかった。そのような内容が書かれた専門書も見渡らないようだ。

「応力とは、そういうものだ！」と、割り切ってしまうのも1つの解決策だが、自分なりの解釈を持って納得したいものだ。

著者の納得内容・解釈は、こうだ。

弾塑性体の該当箇所に焦点を当てている「応力」というものの源泉は「力」である。「力」は、力学的に観れば6種の力の成分で構成されている。3つの**並進力**(直交3方向)と3つの**回転力**(直交3方向廻り)である。

従って、本来なら応力もこの6種の成分で構成されるべきと考えられるが、回転力を取り除き、3つの並進力だけで"事足りる"と推断した。

その根拠は「直交六面体微小要素」の"微小要素"に潜んでいる。該当箇所の領域を縮小していって無限小の直交六面体微小要素にて観察すれば、回転力で生じる「曲げ」や「捩れ」という荷重形態は、幸いにも、「引張(圧縮)力」や「せん断力」に置き換えることができる。

つまりは、引張(圧縮)力やせん断力は並進力の一形態であり、それに応じて垂直応力とせん断応力だけの成分で分類・構成できる訳である。

こういう発想があったかどうかは知らないが、材料力学史を繙くと、**コーシー** (Augustin Cauchy, 1789～1857)という人が、それに近い内容を示唆する理論を提唱している。それは、3つの並進力をベースとした応力成分(垂直応力、せん断応力)から直交六面体微小要素に対する「**釣り合い方程式**」を誘導し、その理論の有効性を示した内容だ。

実は、応力の概念や応力状態・応力成分を提案したのが、この人：コーシーである。

ついでながら、応力楕円面を発見した人も付記しておこう。それは、**ラメ**(G. Lame, 1795 ～ 1870)という人だ。

以上、長々と「応力とは何ぞや？ 」について説明してきた。

いささか冗長になったきらいもあるが、それだけ応力の概念は重要である、と解釈してお許し願いたい。